



Uplifting Mathematics for All

Guía didáctica

Puntos que explotan

(Exploding Dots™)

Experiencia 5:

La división

Visión general	2
La división	3
El resto	6
Material A: <i>La división y el resto</i>	7
Soluciones a las preguntas de «Material A»	8
Material B: <i>Exploraciones brutales</i>	10

Recursos relacionados:

- Podéis acceder a vídeos y más recursos en [Exploding Dots - Global Math Project](#).
- Accede a [actividades guiadas en Desmos](#).
- Juega en línea con el *widget* de [Dhimad](#) (incluye álgebra).

Visión general

Objetivos del alumno

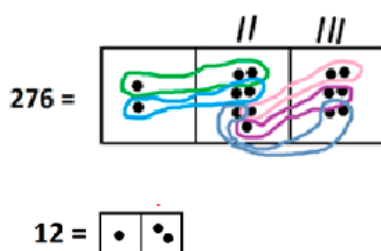
La división se puede interpretar como un proceso de cálculo: la operación $276 \div 12$ consiste simplemente en preguntar cuántos grupos de 12 se pueden encontrar en una imagen de 276. Los gráficos de los puntos y las casillas hacen que este proceso de cálculo sea excepcionalmente natural.

Breve resumen de la experiencia

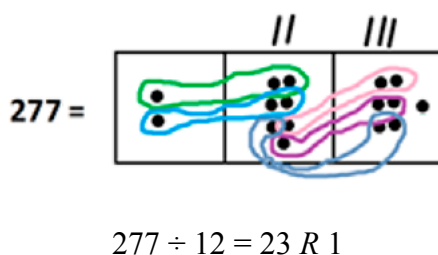
Para calcular $276 \div 12$, podemos dibujar en un papel una imagen formada por 276 puntos y, después, formar grupos de doce puntos rodeándolos con un círculo. El número de grupos de doce que obtenemos es la solución a la división.

¡Pero este método es muy poco eficiente para calcular una división!

De manera alternativa, podemos dibujar una imagen de 276 en una máquina $1 \leftarrow 10$ y buscar los grupos de doce. Enseguida vemos que hay 2 grupos en la casilla de las decenas y 3 en la casilla de las unidades; es decir, hay 23 grupos en total. Tenemos que $276 \div 12 = 23$.



También se puede detectar el resto fácilmente:



Introducción

Podéis ver el vídeo de bienvenida, en el que James introduce esta experiencia, aquí: <https://globalmathproject.org/exploding-dots/> [1:43 minutos].

La división

Podéis ver un vídeo de James sobre esta lección aquí:

<https://globalmathproject.org/exploding-dots/> [7:38 minutos].

Este es el guion que sigue James cuando explica la lección en la pizarra. Por supuesto, podéis adaptarlo como mejor os convenga. En el vídeo podréis ver cuándo y cómo dibuja James los diagramas y cómo los va ampliando.

La suma, la resta y la multiplicación. Y ahora toca la división.

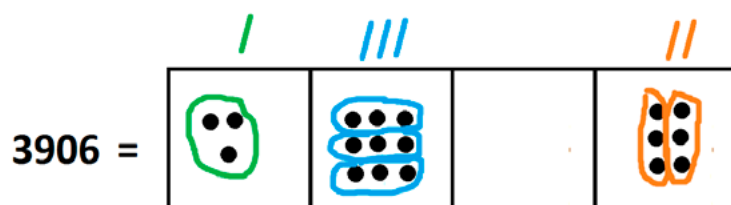
Empecemos poco a poco, con una división a la que quizá le encontraremos enseguida la solución.

¿Cuánto es $3906 \div 3$?

La respuesta es 1302.

Si pensáis en 3906 como $3000 + 900 + 6$, entonces podremos ver que dividir por tres da $1000 + 300 + 2$.

Efectivamente, podemos verlo si dibujamos una imagen de 3908 en una máquina $1 \leftarrow 10$. Vemos grupos de tres: 1 grupo en la casilla de los millares, 3 grupos en la casilla de las centenas y 2 grupos en la casilla de las unidades.

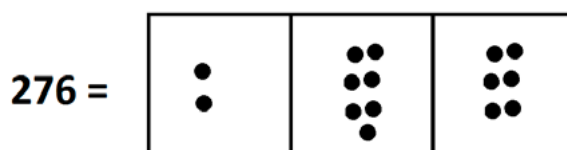


¡Eso es! Estamos haciendo divisiones ¡y vemos que los resultados salen solos!

Con la división por una cifra no hay problemas. Pero ¿qué pasa con la división por más cifras? La gente suele llamarla *división larga*.

Veamos esta división: $276 \div 12$.

Aquí tenemos una imagen de 276 en una máquina $1 \leftarrow 10$:



Y estamos buscando grupos de doce en esta imagen de 276. Así se ve el doce.

$$12 = \begin{array}{|c|} \hline \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \hline \end{array}$$



En realidad, esto no es correcto, porque en nuestra máquina $1 \leftarrow 10$ habría una explosión y aparecería el doce en forma de un punto al lado de dos puntos. Pero siempre debemos tener presente que en esta imagen, en realidad, los doce puntos se encuentran en la casilla de más a la derecha:

$$12 = \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \bullet \\ \hline \end{array}$$

Muy bien. Estamos buscando grupos de doce en nuestra imagen de 276. ¿Vemos algún punto al lado de dos puntos en el diagrama?

Sí, aquí hay uno. Es un grupo de doce en forma de «gusanito» (ya veréis que los gusanitos son muy moldeables).

$$276 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet & \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \hline \end{array}$$



En cada gusanito de doce vemos que, de hecho, los doce puntos se encuentran en la parte derecha del gusanito. Por tanto, hemos encontrado un grupo de doce en la casilla de las decenas.

$$276 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet & \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \hline \end{array}$$

Aquí tenemos una cuestión sutil pero relevante: los doce puntos del gusanito se sitúan en su parte derecha. Tal vez sea necesario recordárselo a los alumnos más de una vez conforme el proceso de división avanza. Como ayuda, podéis decirles: «Si tuvierais que hacer no explotar algunos puntos dentro del gusanito, ¿qué puntos podrían no explotar (y quedarse en el gusanito) y en qué casilla acabarían, finalmente, los doce puntos?».

Y hay más grupos de doce:

$$276 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet & \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \hline \end{array}$$

En total, vemos 2 grupos de doce en la casilla de las decenas, 3 grupos en la casilla de las unidades. Así pues, la solución de $276 \div 12$ es 23.



POR CIERTO..., ¡DEJO LA IMAGEN DE $276 \div 12$ EN LA PIZARRA! ES IMPORTANTE POR SI VAIS A LA EXPERIENCIA 6, QUE TRATA SOBRE LOS POLINOMIOS. Un poco furtivamente, disimulo y no borro esa parte de la pizarra, aunque sigamos adelante con más ejemplos y más trabajo.



Llegados a este punto, tal vez pido a los alumnos que lo intenten por sí solos y hagan $2783 \div 23$ y, después, $31824 \div 102$, y les comento que con esta segunda tuvimos un pequeño contratiempo en el vídeo. O tal vez hago simplemente $31824 \div 102$ como parte de la lección. Depende de lo que me parezca más adecuado para los alumnos.

Veamos otro ejemplo. Calculamos $31824 \div 102$.

Aquí tenemos la imagen:

31824 =

•• •	•	••• ••• •••	••	•• ••
---------	---	-------------------	----	----------

102 =

•		••
---	--	----

Ahora buscamos grupos de un punto-sin puntos-dos puntos en nuestra imagen de 31824. (Y recordad que los 102 puntos están físicamente ubicados a la derecha del todo de cada uno de los conjuntos que identificamos.) Se trata de la misma cuestión sutil pero relevante que comentábamos antes.

Podemos detectar estos grupos. (Ahora me parece demasiado complicado dibujar gusanitos y, a partir de aquí, haré X, círculos y recuadros. Ningún problema, ¿no? ¿Y veis también que, al final, he marcado un grupo doble con un único recuadro?)

31824 =

				
---	---	---	--	---

Ahora se puede ver 312, que es la solución de $31824 \div 102$.

Por lo general, dedico un tiempo a explicar cómo se adapta el método de división con puntos y casillas al algoritmo tradicional. Me resulta complicado escribir sobre esto porque hay países con sistemas notacionales diferentes para la división larga y métodos ligeramente distintos para los algoritmos. Por ejemplo, en Estados Unidos, ahora es habitual pensar en la división larga como una «resta repetida», mientras que el algoritmo que se enseña en Serbia y en Australia, por ejemplo, tiene más misterio.

En este vídeo de la lección 5.6 (<https://globalmathproject.org/exploding-dots/>) podréis ver cómo es el método australiano y qué suelo hacer yo con los alumnos justo en este momento. Y, en cuanto al método estadounidense, podéis leer el texto que hay a continuación de este vídeo de la lección 5.6. En el caso de vuestro país, entiendo que lo mejor será que vosotros mismo veáis cómo podéis adaptar el método de punto y casillas (que quizá ya es muy similar), y que decidáis si queréis compartirlo con vuestros alumnos llegados a este punto.

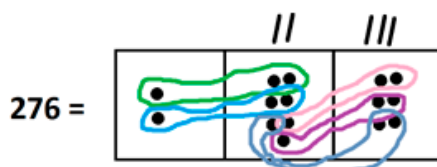


El resto

Podéis ver un vídeo de James sobre esta lección aquí:

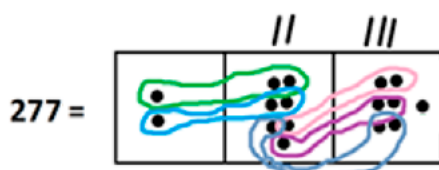
<https://globalmathproject.org/exploding-dots/> [1:59 minutos].

Hemos visto que $276 \div 12$ da 23.



Imaginaos que, en vez de esto, intentáramos calcular $277 \div 12$. ¿Qué imagen obtendríamos? ¿Cómo tendríamos que interpretarla?

Bien, veríamos la misma imagen que antes, pero con una diferencia: la presencia de un punto extra, que no podemos incluir en un grupo de doce:



Esto demuestra que $277 \div 12$ es igual a 23 con un resto de 1.

Que se puede escribir así:

$$277 \div 12 = 23 R 1$$

O con alguna notación equivalente para el resto. (La notación para el resto puede variar de un país a otro.)

O podemos ser un poco más precisos desde el punto de vista matemático y decir que $277 \div 12$ da 23, con un punto más que hay que dividir por doce:

$$277 \div 12 = 23 + \frac{1}{12}$$

Si modificáis la imagen de $276 \div 12$ en la pizarra añadiéndole un punto para que dé $277 \div 12$, procurad borrar el punto extra sin darle importancia, para que la imagen vuelva a ser la de $276 \div 12$. Necesitamos esta imagen para cuando nos pongamos con los polinomios en la experiencia 6.

Material A: La división y el resto

Utilizad el material que encontraréis a continuación para los alumnos que quieran practicar con las preguntas de esta lección y reflexionar sobre ellas después en casa. NO son deberes, es totalmente opcional. (Existe una versión imprimible: *Puntos que explotan. Experiencia 5.*)

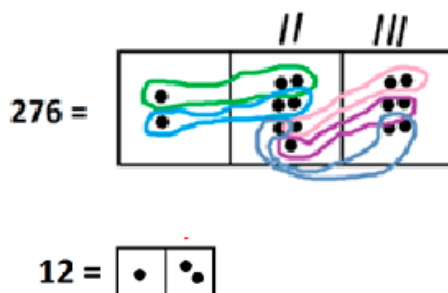
Puntos que explotan

Experiencia 5: La división

Podéis acceder a los vídeos de todas las lecciones de *Puntos que explotan* aquí:
<https://globalmathproject.org/exploding-dots/>

Material B: La división y el resto

En esta imagen vemos que $276 \div 12$ es igual a 23:



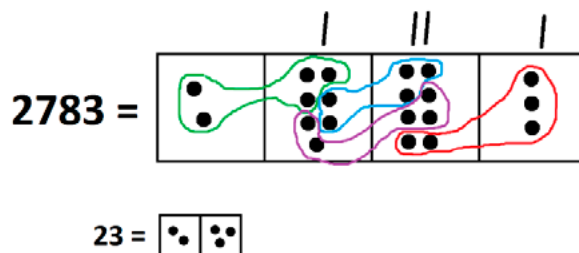
Aquí tenéis algunas preguntas prácticas que podéis intentar responder, si queréis.

1. Calculad manualmente $2783 \div 23$ según el método de puntos y casillas.
2. Calculad $3900 \div 12$.
3. Calculad $46632 \div 201$.
4. Demostrad que $31533 \div 101$ es igual a 312 con un resto de 21.
5. Calculad $2789 \div 11$.
6. Calculad $4366 \div 14$.
7. Calculad $5481 \div 131$.
8. Calculad $61230 \div 5$.

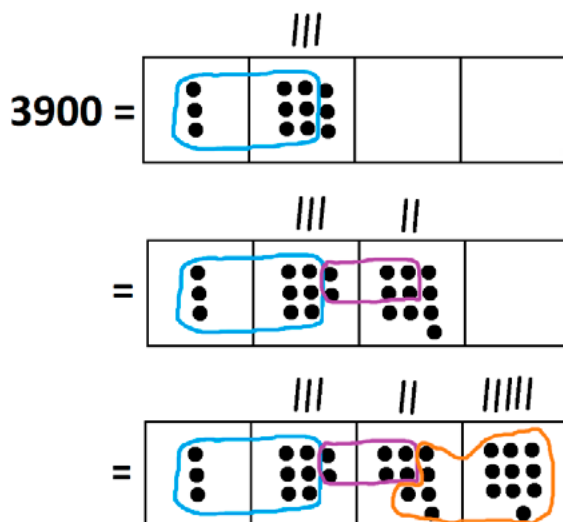


Soluciones a las preguntas de «Material A»

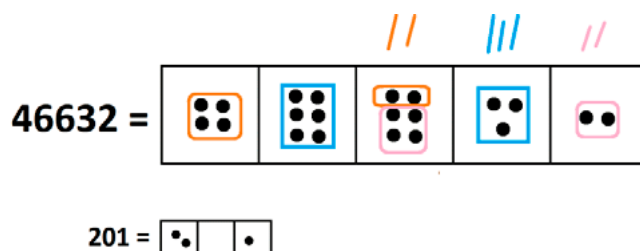
1. $2783 \div 23 = 121$.



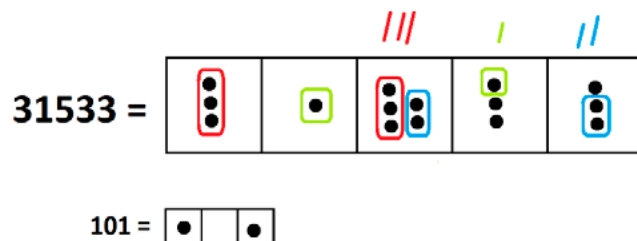
2. $3900 \div 12 = 325$. Tenemos que hacer algunas no explosiones por el camino. (¿Veis qué nivel de eficiencia estoy logrando con mis dibujos de gusanitos moldeables?)



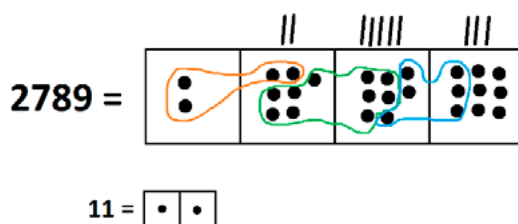
3. $46632 \div 201 = 232$.



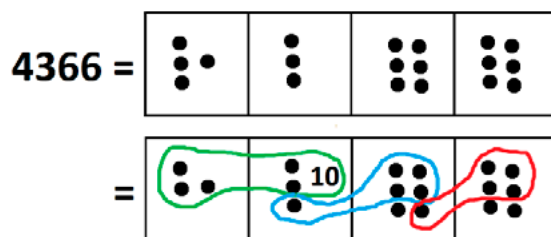
4. $31533 \div 101 = 312$ con un resto de 21. Es decir, $31533 \div 101 = 312 + \frac{21}{101}$.



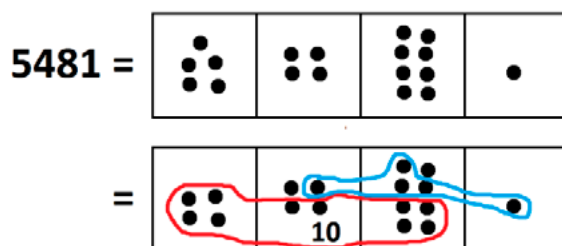
5. Tenemos que $2789 \div 11 = 253$ con un resto de 6. Es decir, $2789 \div 11 = 253 + \frac{6}{11}$.



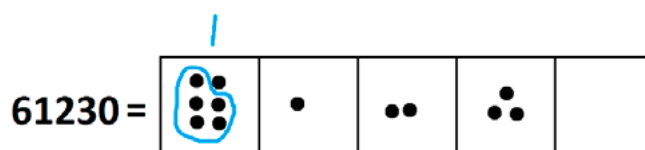
6. $4366 \div 14 = 311 + \frac{12}{14}$.



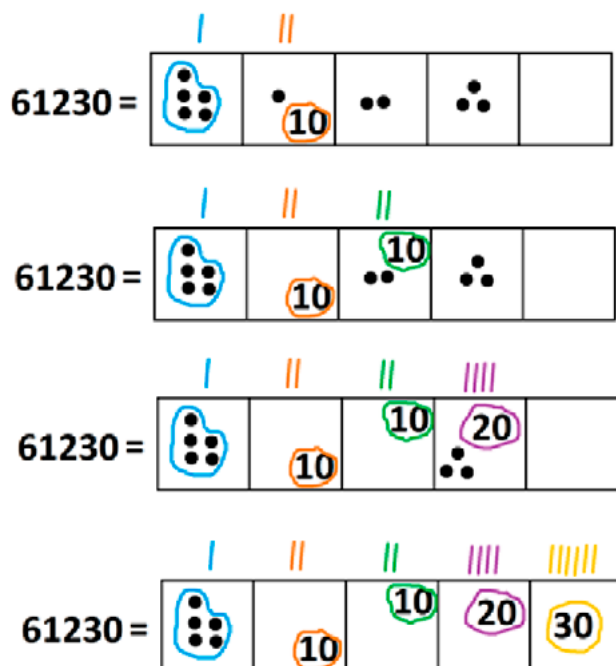
7. $5481 \div 131 = 41 + \frac{110}{131}$.



8. Efectivamente, enseguida vemos un grupo de cinco.



Hacemos algunas no explosiones. (Y mejor lo escribimos en cifras en vez de dibujar un montón de puntos.) ¡Qué aburrido llega a ser dibujar puntos!



Vemos que $61230 \div 5 = 12246$.

Material B: Exploraciones brutales

Utilizad el siguiente material para facilitarlo a aquellos alumnos que quieran reflexionar después en casa con preguntas profundas relacionadas con la experiencia. NO son deberes, es totalmente opcional, pero podría servir como fuente para futuros proyectos de los alumnos. (Existe una versión imprimible: *Puntos que explotan. Experiencia 5.*)

Puntos que explotan

Experiencia 5: La división

Podéis acceder a los vídeos de todas las lecciones de *Puntos que explotan* aquí:

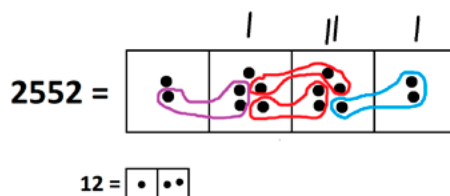
<https://globalmathproject.org/exploding-dots/>

Material B: Exploraciones brutales

Aquí tenéis una investigación sobre una «gran pregunta»: podéis explorarla o simplemente reflexionar sobre ella. ¡Divertíos!

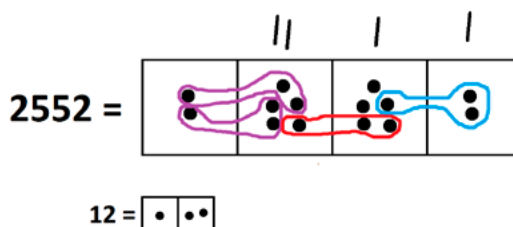
EXPLORACIÓN: ¿DE IZQUIERDA A DERECHA? ¿DE DERECHA A IZQUIERDA? ¿EN QUÉ ORDEN?

Cuando se pidió que se calculara $2552 \div 12$, Kaleb dibujó esta imagen, que obtuvo después de identificar grupos de doce, yendo de derecha a izquierda:



Dijo que la solución de $2552 \div 12$ es 121 con un resto de 1100.

Mabel, por su parte, identificó grupos de doce, yendo de izquierda a derecha en el diagrama que hizo para la división:



Concluyó que $2552 \div 12$ da 211 con un resto de 20. Tanto Kaleb como Mabel tienen razón desde el punto de vista matemático, pero su profesor les comentó que la mayoría de las personas esperarían una solución con un resto más bajo: tanto 1100 como 20 se considerarían restos extraños para una división por doce. También les mostró la solución que hay en el libro de texto para esta división:

$$2552 \div 12 = 212 R 8$$

¿Qué tienen que hacer Kaleb y Mabel para obtener, en su diagrama, la solución que da el libro de texto?

